Analiza Funkcjonalna + Topologia
WPPT IVr. semestr letni 2013
WYKŁAD 12: Twierdzenie Banacha–Steinhausa

Kolejnym z ważnych twierdzeń dotyczących operatorów na przestrzeniach unormowanych (Banacha) jest twierdzenie Banacha–Steinhausa, które podaje kryterium ograniczoności zbioru operatorów. Ponownie, w dowodzie korzysta się z Twierdzenia Baire'a. Dowód jest prostszy od dowodu twierdzenia o odwzorowaniu otwartym.

Twierdzenie (Banacha–Steinhausa). Niech $\mathcal{F}$ będzie rodziną operatorów ciągłych z przestrzeni Banacha X w przestrzeń unormowaną Y. Wtedy zbiór $\mathcal{F}$ jest ograniczony w normie operatorowej wtedy i tylko wtedy gdy zbiór

$$A = \{x \in X : \sup_{T \in \mathcal{F}} \|Tx\| < \infty\} \qquad (\subset X)$$

jest II kategorii (nie jest I kategorii) w X.

Dowód: Jeśli operatory są wspólnie ograniczone to powyższy zbiór jest całym X, co na mocy tw. Baire'a nie jest zbiorem I kategorii.

Teraz w drugą stronę: załóżmy, że zbiór A nie jest I kategorii. Wtedy $A = \bigcup_{n \geq 1} A_n$, gdzie

$$A_n = \{x \in X : \sup_{T \in \mathcal{F}} \|Tx\| \leq n\}.$$

Gdyby każdy A_n był nigdzie gęsty, to A byłby I kategorii, a skoro tak nie jest, to istnieje n_0 takie, że $\overline{A_{n_0}}$ zawiera pewną kulę $B(x_0, r)$. Zauważmy, że zbiory A_n są domknięte — z ciągłości operatora i normy (zbiór A_n jest przekrojem po $T \in \mathcal{F}$ przeciwobrazów przez złożenie $\|\cdot\| \circ T$ przedziału domkniętego $[0, n]$). Zatem $\overline{B(x_0, r)} \in A_{n_0}$ (domknięcie nad A_{n_0} można opuścić, natomiast kulę można domknąć). Ustalmy dowolny $x \in X$ i niech $x' = \frac{r}{\|x\|} x + x_0$. Wtedy $x' \in \overline{B(x_0, r)} \subset A_{n_0}$ oraz $x = \frac{\|x\|}{r}(x' - x_0)$. Oczywiście również $x_0 \in B(x_0, r) \subset A_{n_0}$. A zatem, dla dowolnego $T \in \mathcal{F}$ zachodzi oszacowanie

$$\|Tx\| = \left\| T\left(\tfrac{\|x\|}{r}(x' - x_0)\right) \right\| = \tfrac{\|x\|}{r} \left\| T(x') - T(x_0) \right\| \leq \tfrac{\|x\|}{r} \left(\|T(x')\| + \|T(x_0)\| \right) \leq \tfrac{\|x\|}{r} 2n_0.$$

Czyli pokazaliśmy, że $\|T\| \leq \frac{2n_0}{r}$. To oszacowanie nie zależy od T, stąd wszystkie operatory z $\mathcal{F}$ są wspólnie ograniczone w normie. $\square$

Uwaga: Oczywiście warunkiem równoważnym ograniczoności $\mathcal{F}$ jest $A = X$. Innymi słowy, rodzina $\mathcal{F}$ nie jest ograniczona $\iff$ istnieje x, taki że zbiór norm $\{\|Tx\| : T \in \mathcal{F}\}$ nie jest ograniczony.

Jednak często łatwiej sprawdzić jest, że A jest II kategorii, niż że jest całą przestrzenią. Ponadto, jeśli ograniczoność $\mathcal{F}$ nie zachodzi, to mamy inofrmację nie tylko, że A nie jest całą przestrzenią, ale że jest to zbiór bardzo mały (I kat.).

Wniosek 1: Jeśli T_n jest ciągiem operatorów z X w Y i $\lim_n T_n x$ istnieje w każdym punkcie $x \in X$, to T określony jako granica punktowa T_n jest operatorem ciągłym.

Dowód: Ponieważ ciąg zbieżny jest ograniczony, dostajemy, że dla rodziny $\mathcal{F} = \{T_n : n \geq 1\}$ zbiór A ze sformułowania tw. B-S jest całym X. Zatem operatory T_n są wspólnie ograniczone co do normy, na przykład przez stałą M. Wtedy dla dowolnego x, z ciągłości normy, mamy

$$\|Tx\| = \|\lim_n T_n(x)\| = \lim_n \|T_n(x)\| \leq M\|x\|,$$

co dowodzi ograniczoności (czyli ciągłości) T oraz, że $\|T\| \leq M$. $\square$

Uwaga: Nie oznacza to jednak, że T_n zbiega do T w normie. Na przykład wiadomo, że zbieżność słaba funkcjonałów (na przykład na przestrzeni Hilberta H) jest istotnie słabsza od normowej, tzn. istnieje ciąg funkcjonałów (a więc operatorów w $\mathbb{R}$ lub $\mathbb{C}$) zbieżny słabo (a więc punktowo) do funkcjonału zerowego, ale nie zbiega do niego w normie H^*. Takim ciągiem jest na przykład $f_n = \langle \cdot , e_n \rangle$, gdzie $\{e_n : n \geq 1\}$ jest bazą ortonormalną (wszystkie f_n mają normę 1, ale zbiegają słabo do zera).

Zadanie: Pokazać, że T_n zbiega jednak do T w topologii zwarto-otwartej (czyli niemal jednostajnie).

Jądro Dirichleta

Niech $\mathbb{T}$ oznacza zespolony okrąg jednostkowy $\mathbb{T} = \{z : |z| = 1\}$ i niech λ oznacza unormowaną miarę Lebesgue'a na $\mathbb{T}$.

Defnicja. Jądrem Dirichleta stopnia n nazywamy funkcję określoną na $\mathbb{T}$ wzorem

$$D_n(z) = \sum_{k=-n}^{n} z^k = 1 + 2\sum_{k=1}^{n} \mathrm{Re}(z^k) = 1 + 2\sum_{k=1}^{n} \cos kt,$$

gdzie $t \in (0, 2\pi]$, $z = e^{it}$.

Twierdzenie (Tożsamość trygonometryczna).

$$D_n(e^{it}) = \frac{\sin((n + \frac{1}{2})t)}{\sin \frac{t}{2}}.$$

Dowód:

$$\frac{1}{2} D_n(e^{it}) = \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n} \cos kt \qquad / \cdot 2 \sin \tfrac{t}{2}$$

$$\sin \tfrac{t}{2} \cdot D_n(e^{it}) = \sin \tfrac{t}{2} + \sum_{k=1}^{n} 2 \cos kt \cdot \sin \tfrac{t}{2} =$$

$$\sin \tfrac{t}{2} + \sum_{k=1}^{n} \left[\sin((k + \tfrac{1}{2})t) - \sin((k - \tfrac{1}{2})t)\right] = \text{(po uproszczeniu parami)}$$

$$= \sin((n + \tfrac{1}{2})t). \qquad \square$$

Twierdzenie. Normy $L^1(\lambda)$ funkcji D_n dążą po n do nieskończoności.

Dowód: Trzeba oszacować całki $\int |D_n(z)|\,d\lambda = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |D_n(e^{it})|\,dt$. Ponieważ interesuje nas tylko zbieżność do nieskończoności, współczynnik normujący $\frac{1}{2\pi}$ zaniedbamy. Piszemy więc, korzystając z tożsamości trygonometrycznej,

$$\int_0^{2\pi} |D_n(e^{it})|\,dt = \int_0^{2\pi} \left|\frac{\sin((n+\frac{1}{2})t)}{\sin\frac{t}{2}}\right| dt > \int_0^{1} \left|\frac{\sin((n+\frac{1}{2})t)}{\sin\frac{t}{2}}\right| dt.$$

Mianownik (bez modułu) jest na całym przedziale całkowania dodatni i szacuje się z góry przez $\frac{t}{2}$, a tym bardziej przez t, zatem nasze całki są nie mniejsze niż

$$\int_0^1 \frac{|\sin((n+\frac{1}{2})t)|}{t}\,dt.$$

Licznik (oznaczmy go przez $h_n(t)$) jest funkcją nieujemną, okresową, o okresie $o_n = \frac{2\pi}{n+\frac{1}{2}}$, małym dla dużego n, i całce z jednego okresu odwrotnie proporcjonalnej do okresu (powiedzmy że całka z jednego okresu wynosi $\frac{C}{o_n}$, gdzie $C > 0$ nie zależy od n). Zauważmy, że wtedy dla dowolnej funkcji ciągłej f na $[a,b] \subset (0,1]$ mamy

$$\int_a^b f \cdot h_n\,dt \ \overset{n}{\to}\ C\int_a^b f\,dt.$$

Ustalmy dowolnie duże M i niech $a > 0$ będzie takie, że $\int_a^1 \frac{1}{t}\,dt > \frac{M}{C}$. Wtedy

$$\int_0^1 \frac{|\sin((n+\frac{1}{2})t)|}{t}\,dt > \int_a^1 \frac{|\sin((n+\frac{1}{2})t)|}{t}\,dt = \int_a^1 \frac{1}{t}\cdot h_n(t)\,dt \ \overset{n}{\to}\ C\int_a^1 \frac{1}{t}\,dt > M.$$

Czyli granica dolna naszych całek wynosi co najmniej M, a że M jest dowolne, dostajemy tezę. $\square$

Wniosek 2: W przestrzeni zespolonej $L^2(\lambda)$ (jest to ośrodkowa przestrzeń Hilberta, a więc i Banacha) ustalmy bazę ortonormalną $\mathcal{B} = \{e_n : n \in \mathbb{Z}\}$ składającą się z funkcji ciągłych $e_n(z) = z^n$. Ustalmy dowolny punkt $z_0 \in \mathbb{T}$. Wtedy zbiór tych funkcji ciągłych zespolonych f na $\mathbb{T}$ (w szczególności należą one do $L^2(\lambda)$), dla których jej szereg Fouriera zbiega w punkcie z_0 (nawet nie koniecznie do $f(z_0)$) jest (tylko) I kategorii w $C(\mathbb{T})$ (z normą supremum). Innymi słowy, dla „typowej" funkcji ciągłej (ze zbioru rezydualnego), jej szereg Fouriera nie zbiega w z_0.

Dowód: Rozważmy na $C(\mathbb{T})$ ciąg funkcjonałów

$$F_n(f) = \sum_{k=-n}^{n} \langle f, e_k\rangle\, e_k(z_0).$$

(n-ta symetryczna suma częściowa szeregu Fouriera funkcji f obliczona w punkcie z_0. Napiszmy jawnie

$$F_n(f) = \sum_{k=-n}^{n} \int f(z)\cdot z^{-k}\,d\lambda(z)\cdot z_0^k$$

Ponieważ sumowanie jest symetryczne, można $-k$ zamienić na k:

$$F_n(f) = \sum_{k=-n}^{n} \int f(z) \cdot z^k \, d\lambda(z) \cdot z_0^{-k} = \int f(z) \cdot \sum_{k=-n}^{n} (zz_0^{-1})^k \, d\lambda(z).$$

Ponieważ λ jest niezmiennicza na mnożenie przez z_0^{-1}, możemy zastosować podstawienie $zz_0^{-1} = y$ i całkować po y. Otrzymamy

$$F_n(f) = \int f(z_0 y) \cdot \sum_{k=-n}^{n} y^k \, d\lambda(y) = \int f_0(y) \cdot D_n(y) \, d\lambda(y) = \int f_0 \cdot D_n \, d\lambda,$$

gdzie $f_0(\cdot) = f(z_0 \cdot)$ jest funkcją f ,,obróconą" o z_0. Zauważmy, że przyporządkowanie $f \mapsto f_0$ jest operatorem liniowym ciągłym (a nawet izometrią) na $C(\mathbb{T})$. Ponieważ oczywiście D_n, jako funkcja ciągła (i nota bene rzeczywista), jest w $L^1(\lambda)$, więc $D_n \, d\lambda$ jest miarą znakowaną na $\mathbb{T}$, czyli, z tw. Riesza, $f \mapsto \int f \cdot D_n \, d\lambda$ faktycznie jest funkcjonałem ciągłym na $C(\mathbb{T})$. Podobnie F_n, jako złożenie operatora izometrycznego z funkcjonłem ciągłym.

Normy funkcjonałów F_n są takie same jak normy w $L^1(\lambda)$ jąder Dirichleta D_n, a więc, z poprzedniego twierdzenia, tworzą one ciąg nieograniczony. Teraz na mocy Twierdzenia Bancha–Steinhausa, oznacza to, że zbiór funkcji f dla których liczby $F_n(f)$ są ograniczone jest I kategorii. Czyli poza tym zbiorem nie ma mowy o zbieżności liczb $F_n(f)$, a to właśnie byłaby zbieżność szeregu Fouriera w punkcie z_0. $\square$

Uwagi:
1. Poprzez przekrawanie zbiorów rezydualnych wnioskujemy, że dla dowolnego *przeliczalnego* zbioru punktów (może on być na przykład gęsty), ,,typowa" funkcja z $C(\mathbb{T})$, ma szereg Fouriera rozbieżny we wszystkich tych punktach.

2. Dla dowolnego zbioru miary zero istnieje funkcja ciągła, której szereg Fouriera jest rozbieżny w każdym punkcie tego zbioru (ale już nie wiadomo, jak duży jest zbiór takich funkcji). Dowód jest o wiele trudniejszy.

3. Jednak prawdą jest, że szereg Fouriera każdej funkcji z $L^2(\lambda)$ zbiega λ-prawie wszędzie do f (jest to Tw. Carlesona – dowód jest bardzo trudny).

Tomasz Downarowicz